基于模型重构的液压重载机械手逆运动学求解算法

黄晓阳 韩文丽 张藩 张裴

（洛阳科技职业学院 河南 洛阳 471000）

摘要： 针对所讨论的 6 自由度液压重载机械手，由于关节构型无法满足 Pieper 准则，在机械手的逆向运动学求解问题上很难得到一个快速、准确的解析解。为此，通过构造腕部无偏置机械手并求其逆解作为理想初始值，然后采用简化 Jacobian 矩阵的牛顿迭代法进行数值迭代求得逆解。文中详细阐述了算法流程，并通过数值计算进行了验证。该方法不仅通过数次迭代就可获得精度较高的逆解值，且流程清晰、简练，实用性强。

关键词： 液压重载机械手；运动学；牛顿迭代法；逆解

0 引言

一种六自由度液压重载机械手，采用全液压驱动方式，偏置手腕的结构形式，承载负荷大，结构强度高，可满足磨机空间内部对从数百公斤到数千公斤不等衬板的作业需求，具有较强的适应性和操作性，目前已在相关矿山企业获得广泛应用。但该机械手目前自动化程度较低，仍采用人工操作方式 [1-3]。

为提高所讨论液压重载机械手的自动化程度，文中对某型机械手进行了运动学建模。但该机械手由于机械结构限制，关节构型无法满足 Pieper 准则，在机械手的逆向运动学求解问题上很难得到一个快速、准确的解析解。针对该问题，通常采用数值法求得近似数值解，主要有牛顿－拉夫森法、神经网络法、优化算法和迭代搜索类算法等，这些算法大部分因算法复杂、运算量大等原因很难保证实时性 [4-8]。

为解决上述问题，文中对所述机械手构型进行了特性分析，通过构造腕部无偏置机械手与采用简化 Jacobian 矩阵的牛顿迭代法相结合的方法求得逆解。该方法算法简便，经数次迭代即可快速收敛，并计算出精确解；同时，也解决了牛顿迭代法需要较严格的迭代初始值的要求。数据实验的结果也证实了算法的有效性。

1 正运动学模型建立

所述 6 自由度液压重载机械手采用球坐标手臂实现抓具的位姿调整，可分作两个部分。其中，手臂有 3 个自由度，实现抓具的大范围位置调整；腕部的 3 个自由度采用滚动角、俯仰角和偏航角配置，分别绕当前轴旋转，实现抓具姿态调整。

如：某一型 6 自由度液压重载机械手结构型式如图 1 所示。其中，手臂的 3 个自由度为：

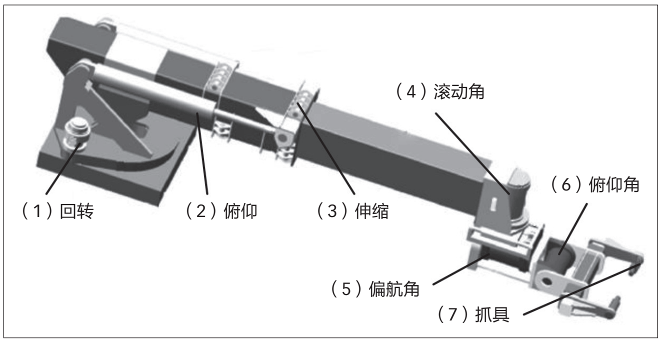

图 1 液压重载机械手结构示意图

（1）回转：由液压马达驱动实现机械手 360° 旋转。

（2）俯仰：通过液压缸的伸缩实现机械手的上下俯仰动作。

（3）伸缩：由液压缸实现机械臂的大范围伸缩。

腕部的 3 个自由度为：

（1）滚动角：由液压摆动马达驱动腕部滚动。

（2）偏航角：由液压摆动马达驱动腕部偏航。

（3）俯仰角：由摆动马达实现抓具俯仰。

上述小臂各轴共同作用，实现将抓具及抓具上的衬板移动至安装工位正前方；腕部各轴共同作用，实现将抓具及抓具上的衬板调整至与工位平齐，协同实现磨机内部衬板的安装作业。

其中，关节 2 由液压缸驱动，如图 2 所示，OAB 三点形成力平衡三角形，将 AB 间液压缸的直线运动转化为绕 O 点的转动。根据图 2 中的几何关系，可得出液压缸伸缩长度与俯仰角度 q_2 的关系：

$$\Delta l=\sqrt{[A'O\times\sin(q_2+\theta)-DC]^2+[A'O\times\cos(q_2+\theta)+EB]^2}-AB \quad (1)$$

因此，为简化后续建模，文中直接使用 q_2 作为关节 2 的关节变量，当通过逆运动学求解得出俯仰角度 q_2 后，可由式（1）可计算出液压缸的伸缩长度。

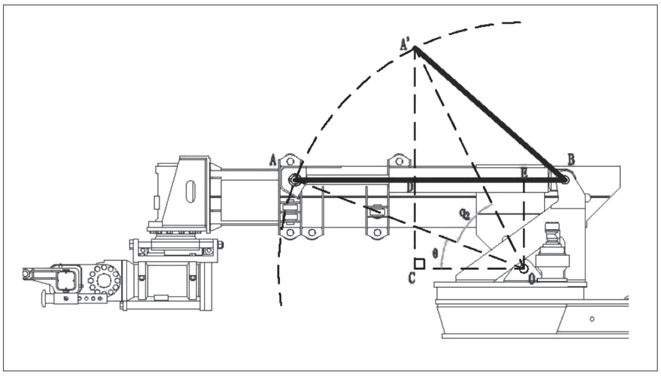

图 2　液压缸伸长长度 与俯仰角 q_2 的几何关系

文中采用标准 DH 模型方法对机械手的连杆和关节进行简化，确定了其从一个关节坐标系到下一关节坐标系的变换步骤 [9]，如表所示。机械手各个关节的参考坐标系如图 3 所示。

表　机械手 *DH* 参数表

序号	q_i/rad	d_i/mm	a_i/mm	α_i/rad	动作范围
0-1	q_1	d_1	0	90	360°
1-2	90+q_2	0	a_2	90	-30° ～ 40°
2-3	-90	d_3	0	-90	0 ～ 2m
3-4	q_4	-d_4	0	90	-40° ～ 40°
4-5	90+q_5	d_5	0	-90	-40° ～ 40°
5-6	q_6	0	0	0	-90° ～ 90°

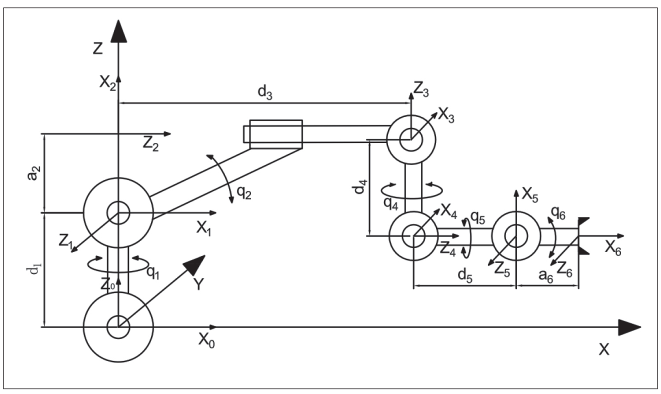

图 3　机械手坐标系模型

其中，q_i 为关节旋转角变量；d_i、a_i 为已知的关节位移尺寸，除关节 3 中的 d_3 为变量；α_i 为旋转角。

根据 DH 参数表，每两个相邻关节参考坐标系之间的齐次变换矩阵为 ${}^0_1T$、${}^1_2T$、${}^2_3T$、${}^3_4T$、${}^4_5T$、${}^5_6T$。

其中，将 ${}^0_1T$、${}^1_2T$、${}^2_3T$ 相乘，得出机械手手臂坐标系 {3} 相对于基坐标 {0} 的位置齐次转换矩阵，如式（2）所示。

$$ {}^0T_3 = {}^0_1T\,{}^1_2T\,{}^2_3T = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_1 & -C_1C_2 & -C_1S_2 & q_3C_1C_2 - a_2C_1S_2 \\ C_1 & -S_1C_2 & -S_1S_2 & q_3S_1C_2 - a_2S_1S_2 \\ 0 & -S_2 & C_2 & q_3S_2 + a_2C_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2} $$

将 ${}^3_4T$、${}^4_5T$、${}^5_6T$ 相乘，得出机械手腕部坐标 {6} 相对于坐标 {3} 的姿态齐次转换矩阵，如式（3）所示。

$$ {}^3_6T = {}^3_4T\,{}^4_5T\,{}^5_6T = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_4S_5S_6 + S_4C_6 & -C_4S_5C_6 - S_4S_6 & -C_4C_5 & d_5S_4 \\ -S_4S_5S_6 - C_4C_6 & -S_4S_5C_6 + C_4S_6 & -S_4C_5 & -d_5C_4 \\ C_5S_6 & C_5C_6 & -S_5 & -d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3} $$

式中，C_n、S_n 代表各关节角 qi 的余弦和正弦，R 代表旋转矩阵或抓具末端姿态，P 代表抓具位置坐标。

观察转换矩阵式（2）、式（3）发现：机械手在进行位置坐标 P 调整过程中，同时引起了末端姿态 R 的变化。同时，由于腕部存在偏置，4-6 轴中心线未相交于一点，机械手在调整末端姿态 R 时，也引起了机械手末端 3 个方向的位置坐标 P 的变化。

综上分析，由于所讨论机械手的腕部 3 个关节未相交于一点，不满足 Pieper 准则，位置和姿态关系深度耦合，造成机械手的逆运动学求解过程复杂，很难得到一个确定的解析解 [6-8]。

2　模型重构机械手的逆运动学求解

机械手运动学分析的主要目的是逆运动学解，从而确定每个关节的值，进而对机械手进行轨迹规划和运动控制，使机械手自动运行到达期望的位姿 [6]。然而，所述构型的机械手不满足 Pieper 准则，难以得到一个计算准确、快速的解析解。为求出逆运动学的解，还可采用迭代性质的数值解法，其中牛顿迭代法算法简便，仅需数次迭代即可得出精确解，但该方法需要较严格的迭代初始值 [6-8]。

由于所讨论机械手的腕部偏置所引起的位置变化相较于机械手的位置坐标占比较小。所以，文中通过对腕部关节调整，构造出一个满足 Pieper 准则、存在确定的解析解的机械手，如图 4 所示。虽然该解与所求精确解存在误差，但偏差较小，可作为数值迭代的初始值。

所构造机械手，消除了腕部偏置 d_5，其他构型和尺

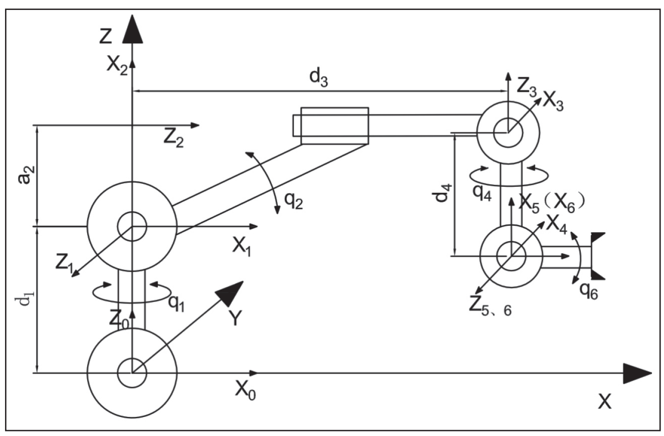

图 4　所构造机械手坐标系模型

寸不变。因此，位置齐次转换矩阵式 2 不变，姿态齐次转换矩阵变为式（4）。

$$ {}_6^3T' = {}_4^3T' {}_5^4T' {}_6^5T' = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_4S_5S_6+S_4C_6 & -C_4S_5C_6-S_4S_6 & -C_4C_5 & 0 \\ -S_4S_5S_6-C_4C_6 & -S_4S_5C_6+C_4S_6 & -S_4C_5 & 0 \\ C_5S_6 & C_5C_6 & -S_5 & -d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4) $$

对于给定的基于基坐标 {0} 的末端位姿坐标为：

$$ {}^0T_{end} = {}_6^0T = {}_3^0T {}_6^3T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5) $$

根据位置转换矩阵式（2），姿态齐次转换矩阵变式（4），以及给定的末端位姿坐标，求得构造机械手的逆解，限于篇幅，此处直接给出结果：

$$ q_1 = \begin{cases} \arctan(\frac{p_y}{p_x}) & p_x > 0 \\ \arctan(\frac{p_y}{p_x})+180 & p_x < 0 \end{cases} $$

$$ q_2 = \arccos(\frac{a_2-d_4}{\sqrt{(p_z-d_1)^2+(p_xC_1+p_yS_1)^2}}) - \arccos(\frac{p_z-d_1}{\sqrt{(p_z-d_1)^2+(p_xC_1+p_yS_1)^2}}) $$

$$ q_3 = C_2(p_xC_2+p_yS_2)+S_2(p_z-d_1) $$

$$ q_4 = \arctan(\frac{C_2(a_xC_1+a_yS_1)+a_zS_2}{a_xS_1-a_yC_1}) $$

$$ q_5 = \arctan(\frac{C_4[S_2(a_xC_1+a_yS_1)-a_zC_2]}{a_xS_1-a_yC_1}) $$

$$ q_6 = \arctan(\frac{S_2(o_xC_1+o_yS_1)-o_zC_2}{n_zC_2-S_2(n_xC_1+n_yS_1)}) \quad (6) $$

在式(6)中，所构造机械手存在多组可能的解。然而，结合表 1 中各轴的运行范围，只有一组最优解满足条件，该最优解即为迭代算法的初始值。

3　优化算法及流程

由于所构造机械手与目标机械手构型存在差异，获得的初始值与所求逆解存在一定的误差，需对初始值进行迭代优化。

首先，根据牛顿迭代法规则，依据关节变量 q_i，坐标变换矩阵${}_6^0T$，末端位姿坐标${}^0T_{end}$，建立牛顿迭代关系式：

$$ q_{n+1} = q_n - \frac{F(q_n)}{F'(q_n)} \quad (7) $$

$$ F(q_n) = ({}_6^0T_q - {}^0T_{end}) \quad (8) $$

其中：

$$ q_n = (q_1^n, q_2^n, q_3^n, q_4^n, q_5^n, q_6^n)，\quad {}_6^0T_q = {}_6^0T(q_n) $$

$F(q_n)$展开后为：

$$ \begin{cases} f_1(q_n) = {}_6^0T_q(1,4) - {}^0T_{end}(1,4) \\ f_2(q_n) = {}_6^0T_q(2,4) - {}^0T_{end}(2,4) \\ f_3(q_n) = {}_6^0T_q(3,4) - {}^0T_{end}(3,4) \\ f_4(q_n) = {}_6^0T_q(2,3) - {}^0T_{end}(2,3) \\ f_5(q_n) = {}_6^0T_q(3,3) - {}^0T_{end}(3,3) \\ f_6(q_n) = {}_6^0T_q(3,2) - {}^0T_{end}(3,2) \\ f_7(q_n) = {}_6^0T_q(1,1) - {}^0T_{end}(1,1) \\ f_8(q_n) = {}_6^0T_q(1,2) - {}^0T_{end}(1,2) \\ f_9(q_n) = {}_6^0T_q(1,3) - {}^0T_{end}(1,3) \\ f_{10}(q_n) = {}_6^0T_q(2,1) - {}^0T_{end}(2,1) \\ f_{11}(q_n) = {}_6^0T_q(2,2) - {}^0T_{end}(2,2) \\ f_{12}(q_n) = {}_6^0T_q(3,1) - {}^0T_{end}(3,1) \end{cases} $$

其中，${}_6^0T_q(a,b)$为变换矩阵${}_6^0T_q$的第 a 行第 b 列元素，${}^0T_{end}$(a, b) 为末端坐标${}^0T_{end}$的第 a 行第 b 列元素。

由式（8）进一步得出此方程式（7）的雅可比矩阵为：

$$ F'(q_n) = J(q_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1^n} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2^n} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_6^n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1^n} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2^n} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial q_6^n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial q_1^n} & \frac{\partial f_{12}}{\partial q_2^n} & \mathrm{L} & \frac{\partial f_{12}}{\partial q_6^n} \end{bmatrix} \quad (9) $$

当∂q_i^n取较小值时，Jacobian 矩阵中元素可简化为：

$$ \frac{\partial f}{\partial q} = \lim_{\Delta q_i \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta q_i} \approx \frac{\Delta f}{\Delta q_i} = (\frac{f(q_n+\Delta q_i^n)-f(q_n)}{\Delta} - \frac{f(q_n-\Delta q_i^n)-f(q_n)}{\Delta})/2 \quad (10) $$

在式（9）中，由于 Jacobian 矩阵 J（q_n）是一个 12×6 的矩阵，不是方阵，不存在逆矩阵。为此，需对 Jacobian 矩阵进行基于 Householder 的 SVD 分解，进而得到广义逆矩阵：$J^{+}=VD^{-1}U^{H}$。则迭代公式（7）转化为：

$$ q_{n+1} = q_n - J^{+}F(q_n) \quad (11) $$

在迭代过程中，还需设置迭代精度和迭代次数 n 作为结束条件，迭代精度取：

$$ error = \|F(q_{n+1})\| \leqslant \varepsilon \quad (12) $$

综上所述，基于构造腕部无偏置机械手与简化 Jacobian 矩阵的牛顿迭代法相结合的数值迭代求得逆解的算法步骤如下：

（1）对于给定的基于基坐标 {0} 的末端位姿坐标${}^0T_{end}$，根据式（6）计算得出所重构机械手的一组最优解。

（2）设定迭代增量 Δ，迭代精 ε 及迭代次数 n。

（3）将步骤（1）所得最优解 q_0 作为 q_i 的初始条件，带入公式（9）求出 Jacobian 矩阵和广义逆矩阵，然后带入公式（11），得到一个更新值。

（4）将该更新值带入公式（12），判断迭代精度是否满足判断条件；判断迭代次数是否超限。若两个条件

均为否，则转至步骤（3），更新 q_i 值继续迭代；若两个条件有一条成立，则跳出循环。

（5）判断最终得到迭代精度是否满足，若不满足，则求解失败；若满足，则求解成功。

4　测试验证

根据以上的算法流程，采用编程计算，进行了大量的数值测试试验。为展示效果列出了部分试验结果，此处随机选取 2 处作为目标点，给定目标关节角为：

q_a=[4.2rad,-0.5 rad,2.5m，0 rad，0.4 rad，-0.6 rad]；

q_b=[1.1 rad,0.3 rad,1.7m，0.45 rad，-0.4 rad，0.35 rad]；

所讨论机械手的连杆参数为（单位：m）：

$$[d_1, a_2, d_4, d_5] = [0.2, 0.6, 0.4, 0.4]$$

利用公式（2）、（3），进行正运动学运算，得出末端位姿坐标分别为：

$$^0T_{end}^a = \begin{bmatrix} -0.7017 & 0.0412 & -0.7112 & -1.295 \\ -0.592 & 0.5218 & 0.6143 & -2.302 \\ 0.3964 & 0.8521 & -0.3417 & -1.015 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^0T_{end}^b = \begin{bmatrix} -0.7017 & 0.0412 & -0.7112 & -1.295 \\ -0.5920 & 0.5218 & 0.6143 & -2.302 \\ 0.3964 & 0.8521 & -0.3417 & -1.015 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将末端位姿带入公式（6），并结合各轴的运行范围，计算得出构造机械手的逆运动学解为：

$$q_a^{'} = [4.2, -0.5, 2.9004, 0, 0.4, -0.6]$$

$$q_b^{'} = [1.1909, 0.2989, 2.0675, 0.3674, -0.425, -0.3605]$$

经比较目标点关节角和逆运动学解，可发现关节变量中 1 ～ 3 项值较接近；当第 4 个关节变量为 0 时，所得近似值仅在第 3 个关节变量处存在偏差。该结论也可通过比较图 2 和图 4 的机械构型得出。

将得出的关节变量作为初始值，并设定迭代增量 Δ=0.001，迭代次数为 6，进行迭代优化。为观察效果，迭代精度 ε 暂不做考虑。经 6 次迭代后，误差曲线如图 5 所示。

观察图 5 可发现：经 3 次迭代后，误差均快速下降至 1×10^{-4}，所得逆解结果数值精度达 0.001，满足实际需求。继续迭代至 5 次后，数值误差降低至 1×10^{-14}。

若将初始值修改为 0，迭代次数修改为 10，经计算后，误差曲线如图 6 所示。

观察图 6 可发现：经 10 次迭代后，误差无法收敛，且计算中所得逆解发散，无法计算出结果。

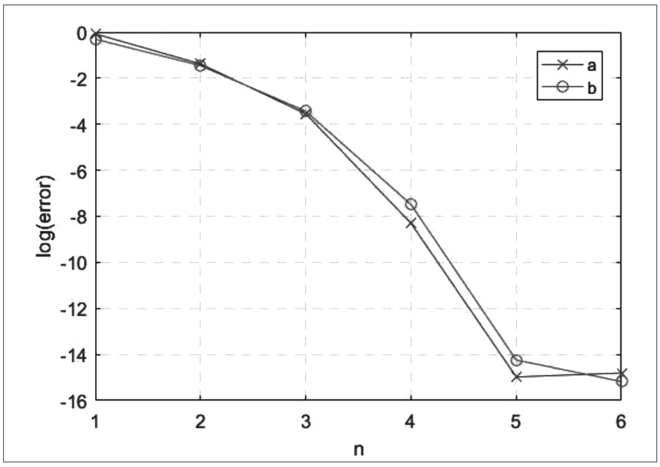

图 5　理想初始值时迭代精度曲线

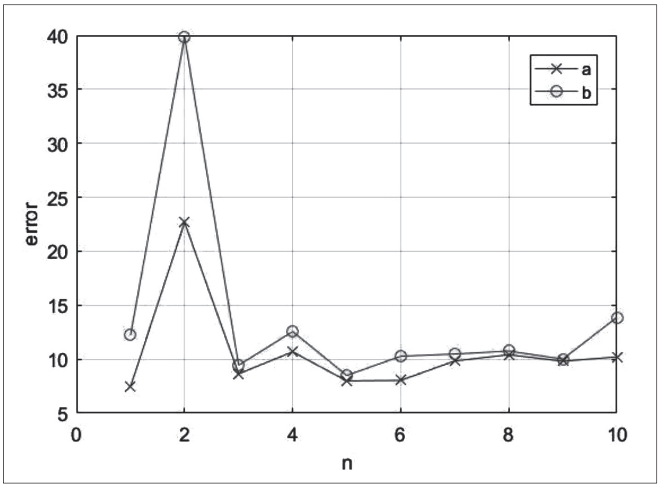

图 6　初始值为 0 时迭代精度曲线

5　结语

文中通过构造腕部无偏置机械手并将其逆解作为理想初始值，然后采用简化 Jacobian 矩阵的牛顿迭代法进行数值迭代，成功获得了所述 6 自由度液压重载机械手的逆解。该方法不仅通过数次迭代即可获得精度较高的逆解值，且流程清晰、简练，实用性强。

同时，该方法还存在以下特点：

（1）通过机构简化，构造与目标机械手构型相似的、满足 Pieper 准则的机械手，构造机械手具有准确的解析解。该解与目标机械手逆解值偏差较小，可作为牛顿迭代法的理想初始值。

（2）所采用的牛顿迭代法，通过建立迭代公式，对公式中的 Jacobian 矩阵进行了简化，不仅避免了复杂的算法推导过程，且流程清晰、简练，实用性较强。

（3）牛顿迭代法需初始值落在目标的邻域范围内，否则将无法得出结果。在试验计算中，当采用理想初始值时，通过 3 次迭代，即可获得精度较高的逆解值。

（下转第 28 页）

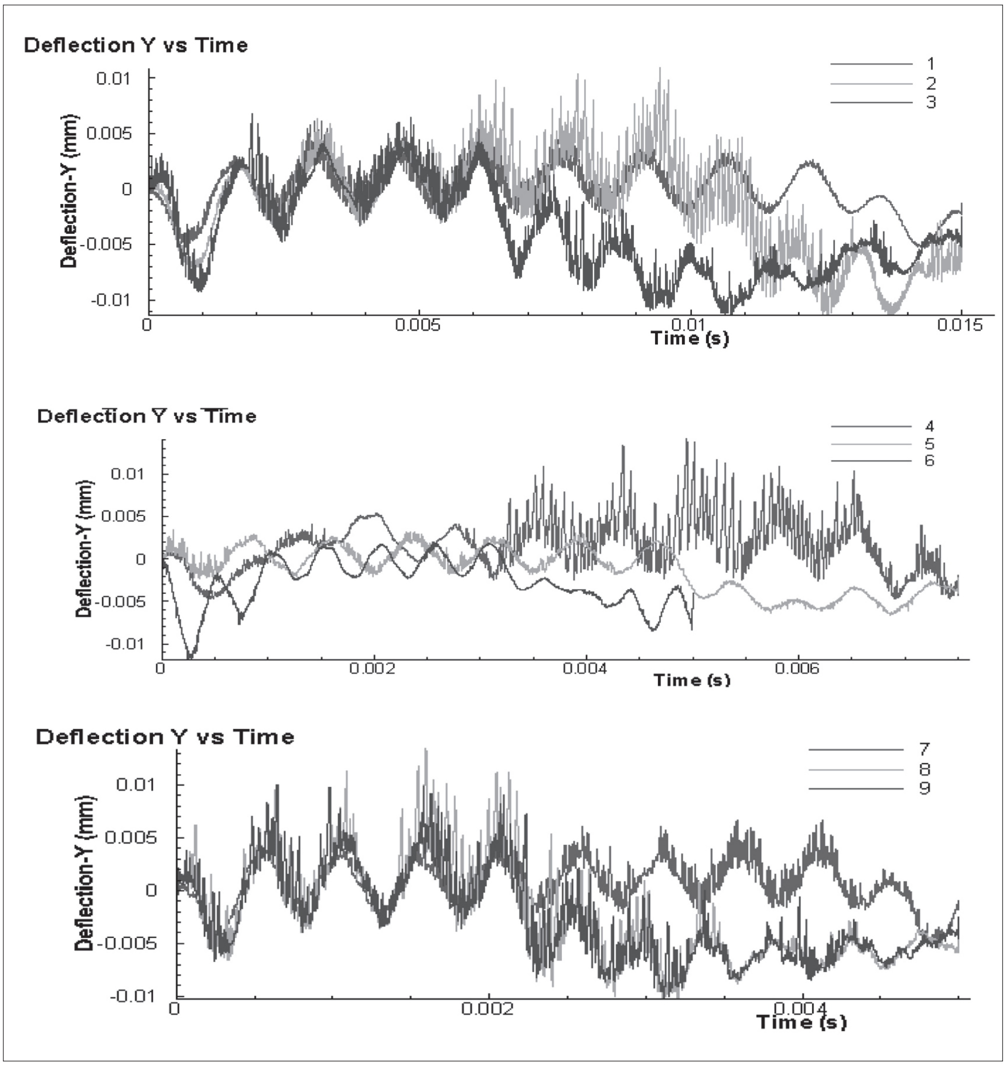

图 7　刀具弹性弹性变形量与切削参数仿真结果

（3）应采用合理的刀具悬出长度，D4 刀具不宜超过 25mm。

（4）在调整加工参数时，按影响程度：主轴转速＜每齿进给＜切宽＜切深进行调整。

通过三维切削软件 AdvantEdge，可直观地测量到刀具弹性变形量，为研究刀具悬出长度、切削参数对刀具弹性变形量的影响提供理论依据，也为今后攻丝工艺方案的确定提供数据支撑。

参考文献：

[1] 朱佳生 . 透平机械制造工艺学 [M]. 北京：机械工业出版社 ,1980.
[2] 秦仁 . 透平机械原理 [M]. 北京：机械工业出版社 ,1981.
[3] 刘旭荣 . 细腻数控加工过程切削力级热变形对加工误差的影响 [D]. 长春：长春工业大学 ,2007.
[4] 赵明 , 刘嘉伟 , 李杰光 . 叶片精密加工弹性变形误差及规律研究 [J]. 机械设计与制造 ,2009(06):106-108.
[5] 孟凡中 . 弹塑性有限变形理论和有限元方法 [M]. 北京：清华大学出版社 ,1985.

（上接第 24 页）

文中采用的方法即满足牛顿迭代法的算法要求，同时收敛速度和计算精度均满足需求。

（4）Jacobian 矩阵 是一个 12×6 的矩阵，需采用 SVD 分解计算其广义逆，虽解决了 Jacobian 矩阵不存在矩阵的逆的问题，但也增加了计算量。

参考文献：

[1] 胡同海 . 杨柳松 . 魏红霞 , 等 . 衬板机械手的基本型式及自由度分析 [J]. 矿山机械 ,2020,48(6):44-48.
[2] 杨溢 , 耿洪臣 . 大型磨机换衬板机械手研究现状 [J]. 矿山机械 ,2009,37(5):70-74.
[3] 李勇 , 王继新 , 郝万军 , 等 .MLH2000 型七自由度磨机换衬板机械手的研制 [J]. 矿山机械 ,2009,37(5):67-69.
[4] 韩磊 , 刁燕 , 张希斌 , 等 . 基于改进牛顿迭代法的手腕偏置型六自由度关节机器人逆解算法 [J]. 机械传动 ,2017,41(1):127-150.
[5] 何理 , 张军 . 基于简化形式的 Jacobian 矩阵的牛顿迭代法求解 6 自由度机器人逆解算法 [J]. 机床与液压 ,2015,43(21):107-112.
[6]Saeed B.Niku. 机器人学导论 - 分析、控制及应用 [M]. 北京：电子工业出版社 ,2013:60-70.

作者简介：黄晓阳（1989.10-），女，汉族，河南洛阳人，研究生在读，研究方向：制造业管理。