

机械制图和建模中投影的维度研究

纪啸天

(马鞍山学院智能工程学院 安徽 马鞍山 243100)

摘要: 本文从维度的角度解释了机械制图和建模中的投影规律和投影方法。通过建立数学模型,研究了投影中三维空间和二维空间的转换关系,并分析了正投影和轴测投影中,三维空间不同维度投影到二维空间时的存在性和独立性。分析结果表明,投影本质上是用低维空间表达高维空间几何体的几何信息表达方法,在工程实际的机械图样绘制和计算机建模中有广泛应用。投影法具有“维度缺失”的固有问题。该问题可以通过增加投影数量、变换投影角度和扩展信息维度的方式进行弥补。

关键词: 机械制图; 建模; 投影规律; 维度

0 引言

投影规律是机械制图和建模的理论基础,工程技术人员需要能够在制图和建模中正确表达工程信息。机械零件等内容的几何信息表达是信息表达的主体,以投影规律和投影法为理论基础。对投影法和投影规律的理解层次决定着工程技术人员的制图和建模水平。

在现有投影规律和投影法的理解角度中,投影过程中的几何求解是理解的重要方向,也是研究重点。2014年,郝立华等用投影变换方法解决画法几何问题。2015年,陈光等针对画法几何中实物演示教具更新缓慢问题,利用旋转机构、滑块导轨机构、双滑块摇杆机构以及单片机控制开发了一种新型画法几何综合演示教具。2016年,李晓详细地讨论了直角三角形法的具体应用特点,并用实例详述了其具体解法。2021年,曲焱炎等以三视图理论为指导,引入虚实体的概念,提出一种组合体读图方法。同年,薛爱文等围绕画法几何习题解的定义域展开讨论,通过具体示例探讨画法几何题目有解的决定因素。

然而,若停留在“求解”层面上,机械建模和机械制图的水平会止步于不同几何体的思考和经验积累。因此,从上位理论对投影规律进行分析,能够帮助提高理论水平,拓展应用范围和应用广度。

机械制图和建模主要是清晰表达几何信息,是对三维几何结构的表达。空间结构包括几何元素的形状和位置两个方面。两者均不能脱离三个维度。而投影面与空间维度数量不同。因此,从维度变化出发进行剖析,能够深入了解投影规律和投影法的使用原理,提升制图和建模水平。

1 投影规律的数学模型

投影是由光线照射物体在墙壁上产生阴影的自然现

象抽象得到的数学方法。光线由光源出发穿过空间几何元素上的点,并与投影平面交于一点。该交点称为对应空间点在投影平面上的投影点。

这里值得注意,空间中的点需要三个坐标值进行描述,即 (X, Y, Z) 。而投影面上的投影点仅需要两个坐标值即可描述,即 (x, y) 。这说明投影过程中,几何元素的描述条件有冲突,造成投影过程中,空间几何元素的坐标数量出现缺失。投影的数学模型可以写成如式(1)所示的形式。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x, y) \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (1)$$

对于线、体等由多个空间点构成的空间几何元素,其上每一点都能够形成一个投影点,这些投影点构成了空间线、体在投影面上的投影。所以空间线、体在投影时会出现几何信息表达不全的情况。

常用的平行投影是利用平行光线垂直于投影面的投影方法。在这个投影方法中,平行光线排列的点会形成重点点。而垂直光线排列的空间点的投影点相对位置不会发生变化。该情况下,式(1)将变为式(2)的形式,此时的投影平面中的 x 和 y 与空间坐标中的 X 和 Y 对应相等,而空间 Z 坐标在投影平面上没有反映。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (2)$$

投影是由空间几何元素的三个相互独立的坐标得到投影面上对应独立坐标的函数。其中,自变量和因变量

分别是空间和投影面的独立坐标。投影过程会造成空间几何结构信息的缺失。

2 投影中维度的变化

在前述数学模型中，将自变量和因变量分别写成其对应空间内的向量形式，作为基向量，建立向量空间。自变量构成的空间具有三个维度。因变量构成的空间被称为二维空间，即平面。根据两者的维度数量，投影规律和投影法是一种用低维空间几何元素表达高维空间几何元素的工程信息表达方法。这个方法存在“维度缺失”的固有问题，其本质是二维空间不能完整表达三维空间信息，有两种体现：维度积聚成点，维度独立性消失。

2.1 正投影中的维度变化

正投影原理如图 1 所示，实际制图建模中，光线总是平行于几何体的重要轴线，造成尺寸缺失。例如，轴类零件投影方向平行于轴线时，圆柱面会积聚成线，长度方向尺寸缺失。

从图 1 中可以看到，此时的投影过程完全符合式的描述。Z 方向形位尺寸完全消失，反映积聚性。但 X 和 Y 方向尺寸反映实形。在实际中，该问题以使用多个不同方向的投影解决。但是，造成维度之间的关系被割裂，必须靠读图能力进行弥补。

2.2 轴测投影的维度变化

轴测投影反映了三个维度的信息，立体信息反映直观。尽管如此，其投影的本质不会改变，因此维度缺失的问题在所难免。轴测投影的维度缺失以维度独立性缺失的方式体现。

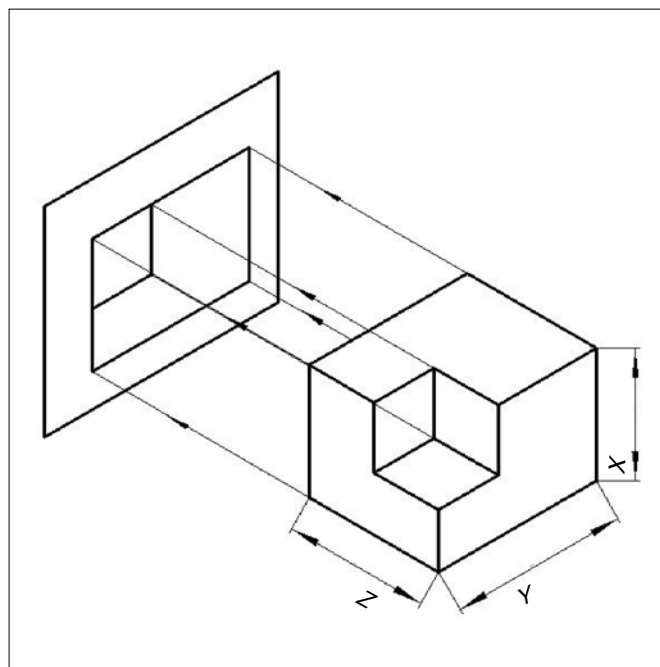


图 1 空间几何体的正投影

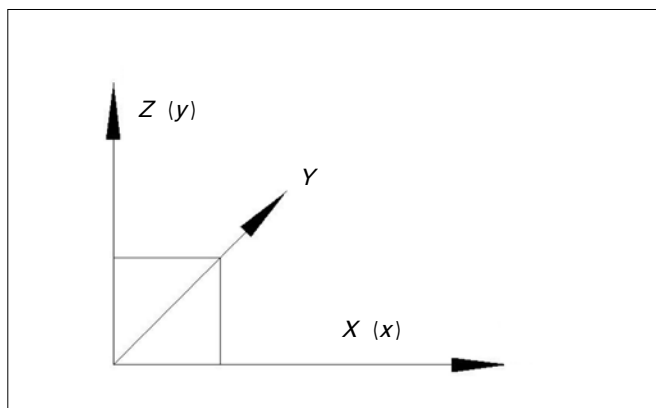


图 2 斜二轴测的投影原理

这里以斜二轴测和正等轴测为例进行分析。如图 2 所示，斜二轴测的投影结果是，Y 轴在投影面上，与其他两坐标轴的投影夹角为 45° ，并且长度是空间中长度的 0.5 倍，此时可以认为投影后的 Z 轴与投影面上的 y 轴重合，投影后的 X 轴与投影面上的 x 轴重合。

通过斜二轴测的绘制方法得到其数学表达如式 (3) 所示。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + \frac{1}{2}Y \cos 45^\circ \\ Z + \frac{1}{2}Y \sin 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\cos 45^\circ \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} \quad (3)$$

从式 (3) 中可以发现，空间中的 Y 维度的变化会同时引起投影结果中两个维度的变化，而投影面坐标和空间中的 X 和 Z 两个维度则只会分别独立影响投影面中的 x 和 y 两个维度。因此可以认为，空间维度 Y 丧失了独立性。

正等轴测图也存在这一问题。如图 3 所示，在投

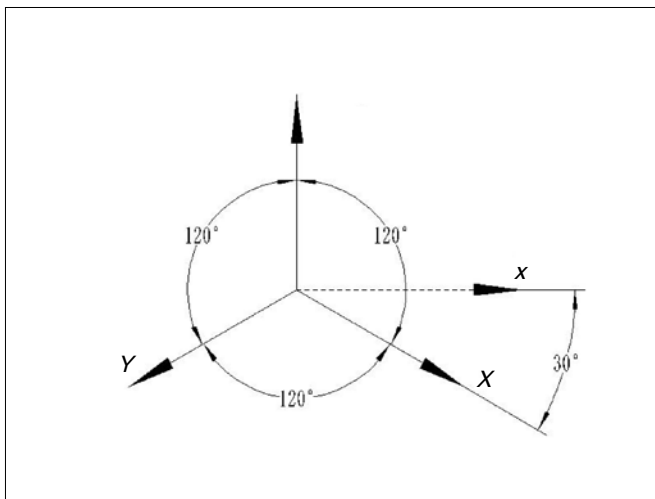


图 3 正等轴测图的投影原理

影结果中,空间中的三个维度 X 、 Y 、 Z 在按照正等轴测投影方法投影到投影平面上之后,三者的夹角均为 120° 。空间坐标轴 Z 和投影面坐标轴 y 重合, X 、 Y 两轴与投影面坐标轴 x 夹角分别为 30° 和 150° 。

轴向伸缩系数取 1, 根据图 3 的几何关系, 可得数学模型如式 (4) 所示。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \cos 30^\circ + Y \cos 150^\circ \\ X \cos 120^\circ + Y \cos 120^\circ + Z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & \cos 150^\circ \\ \cos 120^\circ & \cos 120^\circ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (4)$$

由式 (4) 可以发现, 空间维度 X 和空间维度 Y 的改变会同时改变投影面的两个维度 x 和 y , 而空间维度 Z 的改变仅对投影面坐标值 y 有影响。这说明在投影过程中, 空间维度 X 和 Y 的改变影响了空间中 Z 维度的投影结果, 即空间维度 X 和 Y 丧失了独立性。

综上, 轴测投影的维度变化为投影过程中维度间独立性的缺失。这种独立性缺失会在一定程度上影响立体感。例如, 正立方体的正等轴测投影会出现对角棱边重合的现象。

3 投影法的维度及其扩展

投影法本质上是一个使用低维空间表达高维空间中几何体的表达方法。高维和低维空间的维度数学关系便是投影规律。

如果将维度的概念扩展为信息的表达方式, 因为维度缺失带来的问题可以用更简单的方式解决。例如, 在圆柱的非截面视图上标注直径符号表达圆截面信息。可以看出, 二维空间几何维度的不足, 能够通过增加信息维度的方式得以弥补。这也说明, 投影法本身是几何信息表达方法, 不必拘泥于几何维度。

在实际的工程表达中, 通过信息维度对表达的补充应用广泛。在机械制图中, 通过规定的符号来表达规定的技术要求便是这一体现。但是, 工程技术问题的表达不仅表达几何结构, 还要表达技术要求。其中, 涉及大量具有严格定义的抽象概念, 这种抽象概念使用简易符号表达最为合适。因此, 在现行的机械图样表达中, 几何结构的表达仍然以投影法为基础。

4 维度变化在制图和计算机建模中的应用

维度的变化是投影规律和投影法中无法避免的现象。但在实际的工程环境中, 机械制图和建模使用的屏幕均可以看作一个二维空间。所以, 从三维空间落到二维空间是制图和建模的必要步骤。掌握投影规律, 本质上就是掌握投影的维度变化。在机械制图过程中, 维度变化体现在制图人员思考方案、落笔图纸的过程中, 也体现在读图上。在计算机建模的过程中, 维度变化体现在模型的几何数据转换到屏幕显示和根据三维模型导出工程图两个方面。这是建模算法中必要环节。

5 结语

通过对投影规律的数学模型以及常用投影法中的维度变化进行分析, 可以得到:

(1) 投影法本质上是使用低维空间表达高维空间几何体的几何信息表达方法;

(2) 投影法存在固有缺陷: 维度缺失, 表现为维度积聚成点或者维度独立性缺失;

(3) 机械制图和建模中, 可以通过增加投影的数量、变换投影角度和拓展信息维度弥补投影法固有的几何维度缺失。

参考文献:

- [1] 郝立华, 孟政. 用投影变换方法解决画法几何问题的研究 [J]. 辽宁师专学报 (自然科学版), 2014, 16 (03): 14-15+27.
- [2] 陈光, 杜微, 刘小东, 等. 面向画法几何教学的新型教具开发和应用研究 [J]. 图学学报, 2015, 36 (06): 828-833.
- [3] 李晓. 直角三角形法在制图教学中的探索与研究 [J]. 陇东学院学报, 2016, 27 (03): 6-10.
- [4] 曲焱炎, 官娜, 李平川. 虚实体分析法在组合体读图中研究 [J]. 机械设计, 2021, 38 (S2): 24-28.
- [5] 薛爱文, 杨小星, 权雳. 画法几何题解的定义域分析及表现形式研究 [J]. 中北大学学报 (自然科学版), 2021, 42 (02): 107-109+116.

作者简介: 纪啸天 (1995.07-), 男, 汉族, 安徽宿州人, 硕士研究生, 助教, 研究方向: 制图、机械设计、加工工艺。